

DOI:10.12405/j.issn.2097-1486.2026.03.001

编者按:

对人工智能底层逻辑的探索一直以来都吸引着诸多研究者的目光。近年来,大语言模型、图像识别与生成、AI 数学实验室等热点话题通常被视为工程实践的胜利,但其本质实则根植于人类数学思想的演进历程。本文将从人工智能发展进程与数学史的双重角度切入,系统梳理从图灵机模型、邱奇-图灵问题到计算机智能化、大模型语义空间、Attention 机制的数学建构人工智能的脉络,探讨人工智能理论中的数学原理,以及当下数学研究中人工智能的应用与局限性,并对二者互利共生、共同进步的未來图景做出前瞻性展望。

数学如何为人工智能建构世界

彭鹏*, 臧一一

山西大学 科学技术史研究所, 山西 太原 030006

摘要:人工智能(AI)的迅速发展常常被视为工程学与算法带来的奇迹,但其底层逻辑深度根植于人类数学思想的演进。本文从科技史的视角出发,探讨数学范式转移在人工智能发展中的决定性作用,并阐明了大数据时代 AI 解决智能问题的数学逻辑。通过分析 Gemini 2.5 Pro 等模型在 IMO 竞赛以及形式化证明领域的卓越表现,展望了数学与人工智能互利共生、共同进步的发展前景。

关键词:人工智能; 数学史; 向量空间; 逻辑推理

中图分类号: TP18

文献标志码: A

文章编号: 2097-1486(2026)03-0215-10

How does mathematics construct the world for artificial intelligence?

PENG Peng*, ZANG Yiyi

Institute of History of Science and Technology, Shanxi University, Taiyuan 030006, China

Abstract: The rapid advancement of artificial intelligence (AI) is often viewed as a marvel of engineering and algorithms; however, its underlying logic is deeply rooted in the evolution of human mathematical thought. From the perspective of the history of science and technology, this paper explores the decisive role of mathematical paradigm shifts in the development of AI and elucidates the mathematical logic employed by AI to resolve intelligence-related challenges in the big data era. By analyzing the outstanding performance of models such as Gemini 2.5 Pro in the International Mathematical Olympiad (IMO) and the field of formal verification, this study provides a forward-looking perspective on the symbiotic and mutually reinforcing future of mathematics and artificial intelligence.

Keywords: artificial intelligence; history of mathematics; vector space; logical reasoning

0 引言

1956 年夏季的达特茅斯会议标志着“人工智

能”(artificial intelligence, AI)作为一门独立学科的正式确立。人工智能的发展同时受到硬件与软件两大因素的协同驱动。一方面,以摩尔定律(Moore's

*通信作者

基金项目: 国家社会科学基金后期资助项目“物理学驱动人工智能认知范式变革研究”(2025-07);中国科协创新战略研究院科研项目“人工智能发展现状及未来趋势研究”(2023-11)

收稿日期: 2026-01-26; **修回日期:** 2026-03-20

Law)驱动的半导体工程学为人工智能所需的庞大算力奠定了物理基础;另一方面,数学则从软件层面为人工智能提供最底层的算法逻辑。作为一门奠基于数学的学科,人工智能本质上的数学属性使得它的发展路径和困境突破往往与数学的发展息息相关。如何实现用机器模拟人类智能的会议目标,至今仍在深刻地塑造着我们的科技与文明。

1 数学史视野中的计算机科学

在人工智能的发展史上,数学无疑是一个无处不在的话题。从计算机的诞生,到人工智能构想的提出,AI技术的起源与不断进步绝非历史上的一次偶然,而是根植于人类数学史上的革命性进步与随之而来的思想飞跃。

从无理数的发现到微积分的创立,再到康托尔集合论的诞生,通过这三次数学革命,人类对数学的认知从最初的直观经验,一步步发展为以严谨的逻辑证明为依托,建立起公理化体系。而随着数学边界的拓展与人类对数学本质理解的进一步深化,计算机科学这门学科在科技史上应运而生,计算机的智能化开始了。

追溯至公元前五世纪,学派成员希伯索斯(Hippasus)向他所处的毕达哥拉斯学派,古希腊数学界的统治者提出了一个问题:“不存在的数字”—— $\sqrt{2}$ 是什么?这个问题成为第一次数学革命的核心,直到公元前370年才被欧多克斯(Eudoxus of Cnidus)解决。它直指仅依赖于直观经验的缺陷之处,深刻地影响了人们学习数学,乃至看待世界的思维方式。它推动数学家不断地在严密逻辑证明体系上下功夫,形式推理则引发了对计算机自动化操作的探索。自第一次数学革命起,逻辑演绎推理方法在各学科领域的研究中都占据了一席之地。AI研究的符号主义学派的基本技术工具就是现代数理逻辑^[1]。

而第二次数学革命——微积分的诞生则极大增强了人类利用数学工具来处理动态与变化问题的能力。链式法则和导数调节所体现的用连续变化逼近最优解的思考路径,为深度学习的梯度下降算法提供了基本工具,最优参数引导着动态学习的过程。值得一提的是,第二次世界大战期间对于微积分计算的需求推动了第一台采用存储程序理念的通用计算机 Electronic Discrete Variable Automatic Computer(以下简称EDVAC)的诞生。这台计算机的前身 Electronic Numerical Integrator and Computer(以

下简称ENIAC)被发明出来以帮助美国军方解决长程火炮过程中的计算问题,但在ENIAC研制成功之前,军方发现它用于其他计算时需要进行复杂的电路更改,而这往往耗时巨大,需要花费数周以至于数个月的时间。于是,当时负责美国氢弹工程的约翰·冯·诺依曼(John von Neumann)与莫奇利(John William Mauchly)、埃克特(J. Presper Eckert)提出了一种全新的设计方案,他们在EDVAC的设计中引入了“存储程序”的概念,从而奠定了现代计算机的架构基础^[2]。

第三次数学革命起源于格奥尔格·康托尔(Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor)的集合论。1874年,德国科学家康托尔建立了集合论,如今我们将其称为康托尔集合论或者朴素集合论。在康托尔集合论理论建立之初,数学家们认为人们如今能够从严谨的逻辑基础上建立起整个数学大厦,但是罗素(Bertrand Arthur William Russell)随后提出的“理发师悖论”则指出康托尔集合论存在的逻辑瑕疵,就此引发了第三次数学危机。为了结束这一场数学危机,德国数学家戴维·希尔伯特(David Hilbert)在巴黎的数学家大会上提出了23个数学问题。其中第二个问题“算术公理系统的无矛盾性”期望建立一个同时具有完备性、一致性与可判定性的数学公理体系^[3]。康托尔集合论所引发的第三次数学革命直接导向了“数学命题是否均可判定”的核心问题。希尔伯特希望数学是完备的,他提出的问题从本质上划分了数学的边界,因为数学只能够解决那些在数学上是完备的问题。虽然英国科学家艾伦·麦席森·图灵(Alan Mathison Turing)受此启发,但与希尔伯特不同的是,比起判断一个问题是不是数学问题,图灵关注的则是如果一个问题是不是数学问题,人们能否在有限的步骤内通过机械的方法找到答案,即这个数学问题是否是“可计算的”。图灵的这一思考最终引出了《论可计算数及其在判定问题上的应用》这篇计算机科学史上至关重要的论文,其中的图灵机模型奠定了整个计算机科学的理论基石。

2 理论意义的计算机

1956年以前,人工智能作为一种哲学构想和数学理论先于技术实践而存在。在17世纪60年代中期,哥特弗里德·威廉·莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz)提出了一个将人类思维数学化的构想,即创造一种通用的、形式化的符号系统,通过逻辑和符

号工具刻画世界的本质。莱布尼茨的“通用符号”理论为理解数学与物理的关系提供了一个新框架,即由数学提供一套自洽的逻辑和符号工具,将人类的思考过程转化为计算公式,这是符号主义AI的认识论起源。牛顿(Isaac Newton)《自然哲学的数学原理》,麦克斯韦方程组和爱因斯坦场方程,再到量子力学都是莱布尼茨思想的延伸。而在19世纪,乔治·布尔(George Boole)将逻辑推理转化为布尔代数,证实了逻辑本身是可以用数学语言去描述的。以上的构想与理论为人工智能的发展提供了一个基础,那就是世界的规律可以被形式符号系统地描述。

1936年,图灵发表论文《论可计算数及其在判定问题上的应用》,图灵在其中通过证明存在不可计算的数来论证希尔伯特的判定性问题不可解^[4]。而这篇论文中最为广为人知的部分则是图灵提出的图灵机模型。图灵机模型使得纯逻辑与纯数学的东西与现实的物理世界相联系起来,并且以此为基础诞生了新的计算理论,如邱奇-图灵论题(Church-Turing thesis);对计算装置的研究则导向了计算复杂性理论,如1971年史蒂芬·库克(Stephen Arthur Cook)提出的P/NP问题(P versus NP Problem),其在当前的数学研究与计算机科学发展中都占有重要地位。

2.1 可计算问题与图灵机模型

图灵机是图灵在1936年提出的一种计算模型,它并非一台实体机器,而是一个抽象的逻辑框架。图灵在论文中提出的图灵机模型由四个部件组成:一条无限长的、离散化的纸带,纸带被划分为连续的存储单元;一个作为输入输出设备和控制接口的读写头,它在任一时刻总是对准纸带上的一个特定的存储地址;一个用于记录“工作模式”的状态寄存器,可以根据当前的状态与纸带上的内容控制读写头,状态的数量是有限的;一个指令表,它严格规定了在任何“特定情况”下应该做什么,指令表代表的就是程序本身。这四个部件结合而成的图灵机模型是一个理论上能够执行任何可计算任务的计算模型,而图灵则通过这样一个计算模型定义了什么是“可计算”的数学问题。

图灵机模型的伟大之处就在于它证明了这种简单的机制足以精确定义“可计算函数”的概念,它形式化地定义了“计算”这一过程的本质,将抽象的数学逻辑概念具象化,并且解决了希尔伯特判定问题,证明在数学上存在着算法无法逾越的边界^[5]——这直接导致了可计算性理论(Computability Theory)

的诞生。

2.2 计算复杂性理论

可计算性理论关注的是一个是否可能通过图灵机来解决,即“对于一个问题,是否存在一个算法,能够在有限时间内给出答案?”而计算复杂性理论(Computational Complexity Theory)关注的是计算的效率,即“对于一个已知可计算的问题,解决这个问题需要多少资源?”

计算复杂性理论依托严谨的数学定义建立起来,其内容主要涉及离散数学、逻辑学和概率论等方面。史蒂芬·库克提出的P/NP问题就属于计算复杂性理论领域的一项未解难题,它在2000年由美国克雷数学研究所列为七大千禧年大奖难题之一,核心内容为判断多项式时间可解的P类问题与多项式时间可验证解的NP类问题是否等价,即判断解决问题与证明解的正确性之间是否存在本质的数学差异。计算复杂性理论使效率讨论变得严格可量化,而随着量子理论的发展,通过将计算内容建模为高维线性代数问题并引入复数概率,经典的计算复杂性理论被重新定义为量子复杂性理论,目前的研究还未能证明二者是否存在包含关系。

2.3 邱奇-图灵论题

阿隆佐·邱奇(Alonzo Church)于1936年提出了 λ 演算系统,同年图灵提出图灵机模型。在邱奇和图灵两人工作的相互印证与融合中,邱奇-图灵论题于1936年底被正式提出。

邱奇-图灵论题的核心观点是任意功能足够强的计算装置都可以互相模拟,邱奇、图灵、克里尼(Stephen Cole Kleene)(邱奇的学生)证明了当时数学家与逻辑学家提出的计算装置,如哥德尔的递归函数、 λ 演算、图灵机等都可以互相模拟。邱奇-图灵命题是一个基于现有观察得出的结论,目前无法被严格证明,但它作为一个桥梁连接了直观的物质世界与抽象的数学逻辑理论,并且使得研究者们能够避免在“为不可计算问题寻找算法”上浪费精力,以帮助他们更好地理解与探索计算的可能性。图1根据计算复杂性划分了这些数学问题。

2.4 量子邱奇-图灵论题

随着量子力学和量子计算概念的出现,学者们开始探索那些经典图灵机模型无法处理的可计算问题,这就引出了量子图灵机和相关的新论题:量子邱奇-图灵论题。它由物理学家大卫·德意志(David Deutsch)在1985年提出,论题内容为任何物理过程都可以被通用量子计算设备有效模拟。它将邱奇-

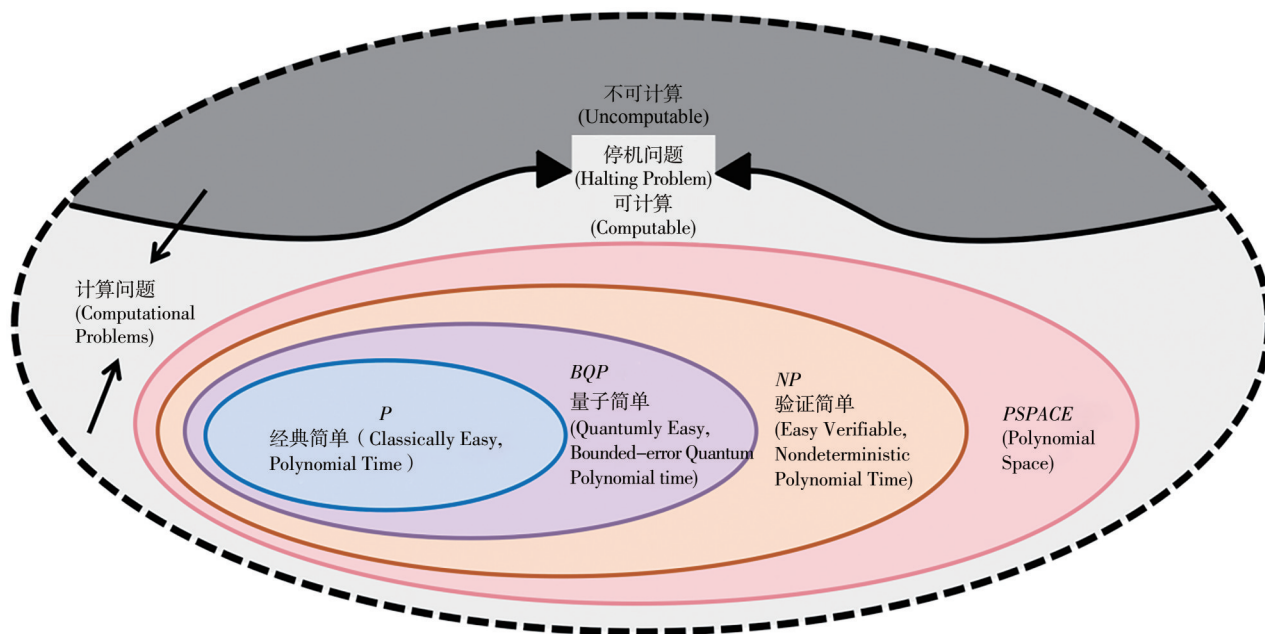


图1 计算复杂性层级与量子计算关系图

Figure 1 Hierarchy of Computational Complexity and its Relation to Quantum Computing

图灵论题推广到了量子领域,而其侧重点则从邱奇-图灵论题原本所关注的可计算性转为计算效率,从而定义在物理层面上有效计算的极限所在。

量子图灵机依然只能计算可计算问题。它表明存在一些可计算问题,经典计算机由于计算效率带来的界限无法解决它们,而量子计算机可以解决这些问题。作为量子邱奇-图灵论题的提出者,大卫·德意志认为计算不是一个抽象的数学概念而是一种物理过程,并重新诠释了图灵的“自然可计算的函数”为“可由真实物理系统计算的函数”^[6],因为它必须遵循宇宙的物理定律——量子力学。这使得人们思考计算的最终边界是由逻辑规则决定的,还是由我们所处的宇宙的物理规则决定的。此外,量子算法的效率提升不是来自并行计算,而是基于对 Hilbert 空间中路径的设计来干涉正确或错误答案的概率。从数学上看,这要求对算法进行泛函分析和线性代数的描述,而不是传统的离散数学描述。这扩大了“算法”这一数学工具的范畴,使其囊括了连续性和几何特性。

达特茅斯会议后,早期 AI 研究的主流是符号主义。它直接继承莱布尼茨和布尔的思想,用数理逻辑来表征知识,进行推理。认为智能存在于形式符号系统中。

3 数学原理与计算机智能化

虽然“人工智能”这一概念直到 1956 年才被正

式提出,但早在 19 世纪末时,有关人造智能生命的科幻文学就已经出现了。有关人工智能的科幻文学兴起于 20 世纪中期——图灵机概念的提出与图灵测试的出现。在人工智能成为现实世界的技术之前,它只是人们投射在文学作品中的幻想与期望。艾萨克·阿西莫夫、阿瑟·C·克拉克等作家描绘了具有类人智能和情感的机器,通过对未来的想象提前揭示了人工智能技术可能带来的社会、伦理和哲学挑战。而如今,这些富有想象力的文字正在被科技的发展变为现实。

3.1 大数据与人工智能

20 世纪 70 年代,研究者们在人工智能研究的低谷期开始尝试数据驱动的发展道路。早期的科学家在研究人工智能时会试图对人类的思维过程进行建模,让机器学会“如何像人类一样思考”。但是这种传统的研究方法遇到了相当多难以克服的阻碍,而且在实用主义兴起的影响下,科学家们的研究方向逐步转向了“如何让机器解决人脑能够解决的问题”,而不再拘泥于其内部的运行过程是否模仿人类^[7]。

20 世纪 70 年代末到 80 年代时,“专家系统”正处于鼎盛期。“专家系统”是早期人工智能符号主义在应用领域的典型代表,它被用于在特定领域内解决复杂的专业问题,其核心是知识库而非通用算法,统计方法在当时并非主流方法。但是,依照“If-Then”规则运作的专家系统在发展中遭遇了组

合爆炸问题:当在数学空间上额外增加一个维度时,其体积会呈指数级的增长,而在专家系统处理问题时,随着问题的规模线性增加,其可能的排列组合数量会以指数级增长,计算机的处理能力远不足以解决这些问题。早期人工智能尝试通过优化搜索方法应对组合爆炸问题,如启发式搜索与剪枝技术,而20世纪70年代末吴文俊(Wu Wen-tsun)院士提出的吴文俊方法为解决逻辑推理与机械计算的结合问题提供了一个先驱性的成果。吴文俊院士提出的‘数学机械化’思想通过将几何逻辑还原为代数运算,实现了证明过程的算法化。这一方法在20世纪80年代在国际上引发热议,它基于中国古代算术,证明“逻辑推理”可以被彻底“计算化”,从哲学层面上将逻辑演绎与机械计算相统一^[8]。这既是一次人工智能研究从模拟人类直觉向底层符号计算的转移,也为随后人工智能处理形式化证明提供了一个范例。

弗莱德里克·贾里尼克(Frederick Jelinek)对于语音识别系统的开发是研究方向转向的一个关键节点,1972年贾里尼克受IBM邀请开发一个语音识别系统,他没有按照当时的研发主流方向让计算机去模拟人的发音与听觉系统,或是理解语法和语义规则,甚至表示“我每开除一名语言学家,我的语音识别系统的性能就提高一点”^{[9]213}。贾里尼克找到了两个数学模型来分别描述信源和信道,并使用统计的方法训练出模型参数。他的方法大大提高了语音识别系统的准确率,使其依赖于数据量的积累而不是语言学知识。不过在20世纪下半叶的研究中,由于数据量缺乏以及数据采集的困难,数据驱动方法的研究成果并没有广泛普及到各个领域。IBM研究中心机器翻译小组在1988年的计算语言学会议(COLING)上发表了统计机器翻译的论文,首次介绍了IBM的统计机器翻译框架。并在两年后于《计算语言学》上对他们之前的工作进行了更全面、更理论化的阐述。这标志着基于统计模型的机器翻译方法再次在数据的支持下登上历史舞台。当进入21世纪后,随着互联网的兴起和计算机算力的提升,研究者能够使用的数据量呈指数型增长,“大数据”这个概念出现在这一由量变引起质变的时代背景下。大数据最为明显、能够从表面词义直接得出的特征就是具有大体量的数据,不过大量的数据与“大数据”之间并不能直接画一个等号,大数据还需要具有统计意义和多维度的信息,在某些研究中大数据也需要同时具有时效性这一特点。

英特尔联合创始人戈登·摩尔(Gordon Earle Moore)在1965年提出了摩尔定律,它是一个经验性的预测,大意为集成电路上可容纳的晶体管数量,大约每经过两年便会增加一倍。摩尔定律所预言的晶体管数量呈指数增长趋势,这也使得与其直接关联的处理器计算能力也随之大幅增强。当21世纪初数据量呈指数形式增长时,计算机处理速度的增长速度也能够与之相适配,大数据的时代也由此开启了。

3.2 让计算机回答问题

图灵机模型所能够解决的问题都是可计算的数学问题,例如判断一个数是否为素数,或者给军方计算长程火炮的炮弹轨迹与落点。而现今我们所说的大数据并不仅仅是交易成交额、股价波动或是某地降水量这样的数字信息,还包含着我们在社交软件上发送的短讯、图片、视频以及音频等等。我们说图灵机模型定义了现代计算机能力的边界,是因为现今我们的每一台计算机,从智能手机到超级服务器,在理论上都可以转化为图灵机这一个计算模型。因此,一个新的问题诞生了:我们怎样将这些智能问题转化为可供图灵机模型计算的数值问题?

事实上,贾里尼克的语音识别模型已经给出了一个行之有效的思路:科学家们并不需要计算机本身去理解“智能”,而是用恰当的数学模型描述出对应的智能问题,并将智能问题形式化、量化为可以计算的数值计算问题。从这个角度来讲,计算机获得智能的方式并不是和人类一样通过推理和思考,而是从大数据中进行学习以解决其遇到的相关问题,计算机正在大数据的作用下变得越来越“聪明”。

3.2.1 矩阵与计算机图形学

或许有不少人都曾经使用过手机的识图功能来辨识不熟悉的东西,人们通过识图功能能够得知植物的名称是什么,照片上的又是什么动物?经常使用识图功能的人会发现,随着近年来科学技术的进步,识图功能的准确率也越来越高了,这是数据量增加与计算机学习模型进步的共同结果。

人们总是希望计算机能够变得更聪明,能够为我们解答更多问题,或是提供更为便利的服务。而为了让计算机能够回答使用者提出的问题,就要提到矩阵与向量映射。在这里,矩阵与向量映射能够将现实世界的问题转化为计算机可以高效处理和求解的数值问题,例如计算机图形学就完全建立在矩阵变化之上。

先从较为简单的识图功能说起。计算机识别图像的前提是它需要具有存储和读取图像资料的功能。在计算机中,一张黑白图像是由一个二维矩阵表示的,这个二维矩阵的元素取值为0—255,称为灰度。灰度这个概念类似于绘画中的“明度”一词,通俗来说,一般情况下灰度值越小,对应图像上的像素越黑。而每一个灰度值则对应图片上的一个像素点,这也是为什么像素值越大的图片占用系统内存越大。而彩色图片则要复杂一些,一张RGB格式的彩色图片是由三个矩阵表示的,它们分别对应图片中的红、绿、蓝三种颜色,也被称为三个通道。在红色通道中,如果一个像素取值为255,就说明这个像素的红色成分达到最大值,反之如果取值为0,则说明这个像素不含有红色成分。把这三个通道代表的单色图片叠合在一起,就是原本的彩色图片,而这三个通道就是这张彩色图片的三维张量(Tensors)。

在传统的逻辑思维中,要识别一只猫的图像,程序员需要穷举猫的特征规则(例如胡须、耳朵、尾巴的形状等)。而在数学视角下,卷积神经网络(CNN)通过“卷积核”(Kernel)这一数学工具,在图像矩阵上进行滑动运算。卷积核是一个小型矩阵,一般为 3×3 、 5×5 或者 7×7 等,它在输入图像上按预设的步幅进行滑动卷积运算。做卷积操作指在每一个卷积核停留的位置,把对应的像素值相乘,再把所有的乘积求和以得到一个单一的数值输出,不断地重复这一个操作,最后计算机会得出一个新的图像。在不使用填充的情况下,由于卷积核无法超越图像边界,这个新图像会比原本的图像小。以使用 3×3 大小的卷积核为例,得到的新图像会比原图像上下各少一行,左右各少一列,这个新图像被称为特征图(Feature Map)。但在实际应用中,为了保留图像的边缘特征并维持空间维度,通常会采用零填充技术使卷积后的特征图尺寸与输入图像保持一致。不同的卷积核会生成不同的特征,人工智能会通过不同的卷积核组合与填充策略,实现对图像特征的多尺度提取与处理。值得一提的是,卷积核的数值不是人为设定的,而是通过人工智能的深度学习得来的。

3.2.2 向大规模统计预测转型

21世纪初,人们普遍认为算法的精妙程度决定着智能的瓶颈,而李飞飞(Fei-Fei Li)在2009年主导构建的ImageNet数据集强调标注数据的重要性,在深度学习革命中发挥重要作用。李飞飞^{[10][122]}在自传中指出:“数据被公然视为一种惰性商品,只在算

法需要时才重要,虽然这种观点并不稀奇,但我开始意识到,有一些重要的东西一直都被低估了。”她意识到数学算法需要以庞大的数据集作为基石,而她的ImageNet数据集及配套的ImageNet大规模视觉识别挑战赛(ILSVRC)被视为推动现代AI发展的核心动力之一。2012年,杰弗里·辛顿(Geoffrey Hinton)及其学生设计的AlexNet深度卷积神经网络在ILSVRC中以压倒性的优势夺冠,AlexNet证明了深度模型在大规模数据下的有效性,成功实现对视觉局部特征的高效捕捉,为目标检测、人脸识别、语义分割等技术领域奠定基础。

Transformer架构问世于2017年,它彻底抛弃循环结构,转为引入自注意力机制,通过计算序列中任意两个元素之间的相关性权重以解决问题。OpenAI联合创始人Andrej Karpathy指出Transformer的能力能够随数据与算力扩展^[11],这不仅使其成为深度学习时代的标准模型,也推动了大语言模型的爆发。

3.2.3 利用向量处理自然语言

向量映射在人工智能的语言大模型训练中有着广泛的运用,例如Transformer神经网络结构的编解码框架。计算机识别图像时,它所处理的问题是一个已经由编程人员提前预设好的问题,就像ENIAC给美国军方处理那些复杂的计算过程一样。但现在的人工智能能做到的远不止这一点,例如最近被广泛使用的豆包或者DeepSeek,它们能够与用户流利地沟通,处理从日常闲聊到询问专业知识各种各样的问题。这就涉及一项人工智能的重要课题——计算机是如何处理和理解自然语言的。早期的机器翻译采取的主要方法是基于语法规则,通过人工方式给机器总结出一套语法规则,然后由机器根据这套规则来翻译语句。但是这种方法遇到了很大的阻碍:自然语言太复杂了,而且语法规则还会不时发生改变,总结出一套准确且全面的语法规则极其困难。后来人们找到了一条新出路,基于统计的翻译方法逐步发展起来。简单来说就是搜集大量的翻译语料,然后对它们进行数据分析,并利用分析结果进行翻译。这种翻译方法受到语料数量的限制,例如计算机必须先知道各个地名或机构名称的各语言译文,才能够正确翻译它们。现代大模型(LLM)的出现,标志着语言学正式被纳入了线性代数的版图。

在人工智能的研究中,自然语言的处理一向是重点研究内容之一,这决定着人们能否使用与其他人交流一样的沟通方式与机器沟通。在这一个大的

研究方向上有许多分支,例如翻译文章、人机对话,近期颇有热度的AI写作也属于自然语言的处理一类。Transformer是一个针对自然语言处理和理解提出的模型,当向该模型输入一个句子时,这个句子将会被映射为一个向量,即由 $x_1, x_2, x_3, x_4 \dots$ 构成的字词序列。这个向量被称作语义向量,其所在的空间被称作语义空间。语义空间中包含了被翻译句子的语义信息,这些句子之间的意思越接近,其在语义空间中的距离就越近。当语义向量在空间中的位置确定好之后,它会通过一个“解码器”变换为由 $y_1, y_2, y_3, y_4 \dots$ 构成的新字词序列,也就是用另一种语言写出来。ChatGPT就采用了这样的编解码框架。

另一个重要的内容是Transformer模型的Attention机制,在此之前循环神经网络由于其序列依赖性(即计算下一个词语必须等待上一个词语的输出)导致无法进行有效的并行计算,严重限制了模型处理长序列数据和大规模训练的效率。Attention机制的数学本质就是计算向量之间的相互关系。如图2显示,ChatGPT生成回答时实际上是在计算输入语句的向量与知识库中各向量之间的“几何距离”与“权重”。这种基于矩阵乘法的并行计算,取代了过去依赖前后文顺序的线性推导,使得AI能够同时处理长文本中的所有依赖关系,捕捉到人类语言中那些无法被语义规则准确描述的细微联系。这是矩阵在提升人工智能运算效率方面的重要应用。

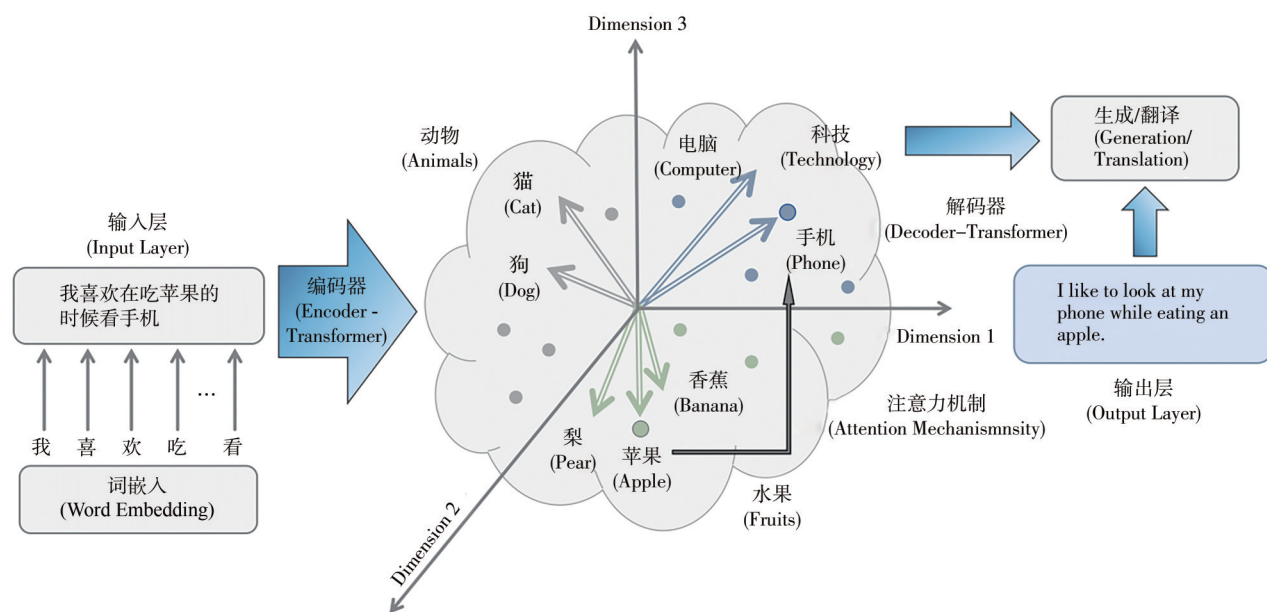


图2 语义空间的向量映射与注意力机制示意图

Figure 2 Schematic Diagram of Vector Mapping in Semantic Space and the Attention Mechanism

在计算机科学中,矩阵与向量的运用形式和理论数学研究有一定的区别。在数学研究中,矩阵和向量经常用于描述函数形态和寻找极值、求解常微分方程组,或是对线性代数本身进行理论深化探究。而在计算机科学中,由于矩阵和向量是描述“多变量”或“多组件”系统的天然语言,计算机通过用矩阵来表示数据集,并且利用向量对矩阵进行变换或分解矩阵来压缩数据,预测缺失值、处理图像或改进搜索引擎。二者的联系之处在于,理论数学对于矩阵与向量基本性质以及其背后关于空间、变换、结构等抽象理论的研究,为解决计算机科学发展中遇到的问题——特别是神经网络、优化理论、计算机图形学这类与人工智能发展紧密联结的技术提

供更为适配且高效的工具,并且拓展新技术的发展路径。

4 AI可以做数学家吗?

近年来人工智能等新兴数字技术的蓬勃发展,离不开数学等基础学科的支撑。除了上文所提到的可计算理论、计算复杂性理论,以及人工智能解答问题时所依赖的矩阵与向量知识基础之外,人工智能的算法设计与优化也还依赖于线性代数、概率统计以及微积分等知识。例如医疗AI诊断报告会使用Softmax函数和交叉熵(Cross Entropy)以生成概率地图和预测误差;利用图论处理社交网络数据的图神经网络(GNN)和用微积分方程模拟连续动

态的微分方程神经网络(Neural ODE)也在不断发展之中。

计算机辅助数学定理证明始于1976年阿佩尔(Kenneth Ira Appel)和黑肯(Wolfgang Haken)对于四色定理的证明,他们对四色定理可能的情况进行分类,并借助计算机枚举的方式予以证明^[12]。在此之后,越来越多依赖计算机辅助完成的证明(如一些对于拉姆齐数问题的求解)出现,甚至引发了《图论杂志》(*Journal of Graph Theory*)主编范荣康(Fan R. K. Chung)博士与弗兰克·哈拉里(Frank Harary)等编委会成员对于如何验证这一新证明方式的讨论。范荣康主编在《图论杂志》的“Editorial”栏目中指出:“如果是一项计算机辅助证明,这是‘一个减分项’;但如果它解决了‘一个经典的难题’,这是‘一个加分项’。”不过她也表示期刊不应承担核实验程序的责任^[13]。

随着AI技术的发展,研究者们不再局限于把眼光放在以人为主、机器为辅的研究方式,一个新的问题也随之提出,AI可以做数学家吗?

4.1 AI作答高考数学卷

在AI模型成为热点话题的当下,AI作答高考数学试卷也成为一个热门话题。事实上,在2024年时上海人工智能实验室旗下的司南(OpenCompass)评测体系组织就对Qwen2-72B、GPT-4o、浦语文曲星等七个AI大模型进行了高考全科目测试,但这七个模型的理科成绩均未达到高考一本线^[14](以2024年高考人数最多的河南省的分数线为参考),评卷人反映AI在解答数学问题时解题过程机械且逻辑性差,无法做出正确的推断,甚至没有一个模型的数学成绩达到及格线。而在2025年由机器之心再次采用2025年高考数学新课标I卷进行测试时,谷歌的Gemini 2.5 pro拿到145分,豆包和DeepSeek则以1分之差并列第二,即使是成绩最差的文心X1 Turbo也得到134分,在考生中属于优异的分^[15]。这样的成绩显示了AI大模型在解答拥有确定性答案、逻辑链条短的数学问题上已经取得了相当不错的成果。

4.2 AI挑战IMO金牌

国际数学奥林匹克竞赛(IMO)被广泛认为是高中数学的世界锦标赛。不同于中国高考数学试卷对考生基础知识的考查,IMO问题以其难度和新颖性而闻名,要求考生具有深刻的洞察力、创造力以及高水平的逻辑思维能力,考生需要解决来自代数、组合学、几何和数论领域的三个问题。与高考数学的

选填题仅需要最终的答案不同,IMO竞赛要求完整且严格的证明,并且会保证题目的新颖性。因此,仅仅通过搜集大量数据进行解题步骤的训练是行不通的。但在2025年度的IMO竞赛中,OpenAI与谷歌研发的DeepMind都在该年度七月份时宣布自己达到了IMO竞赛金牌的成绩^[16]。2025年10月1日,黄溢辰(Yichen Huang)与杨林(Lin F. Yang)发表了名为*Winning Gold at IMO 2025 with a Model-Agnostic Verification-and-Refinement Pipeline*的论文,论证了他们的模型无关LLMs算法,但同样完成了IMO竞赛金牌的挑战,象征着高级人工智能推理的发展途径上基础模型与有效学习方法正在同时进步,具有完成复杂任务的潜力^[17]。

4.3 AI数学实验室

在2025世界人工智能大会(WAIC)“人工智能的数学边界与基础重构论坛”上,Hitchin-Ngo实验室与Fefferman实验室举行揭牌仪式,标志着国际顶尖数学研究力量落地上海。由菲尔兹研究院与ICMAT联合发起的两大国际数学实验室,聚焦几何深度学习、微分方程与神经网络融合等方向,推动数学理论为AI提供“公理支撑”。数学科学全国重点实验室也在2024年12月获科技部批准成立,在数学院原有“科学与工程计算”全国重点实验室及5个中国科学院级重点实验室基础上整合组建而成,其中八项实验室攻坚团队中就包括了“人工智能的数学理论”攻坚团队。AI已经作为例如形式化证明等定理验证过程中的重要工具,在研究过程中,AI能够自动完成证明的某些步骤,处理证明中繁琐、复杂的机械性劳动,以及预测下一步最有可能成功的证明策略。如DeepMind曾成功帮助数学家发现了表示论和纽结理论中全新的定理与猜想,开启了“人机协作”的数学研究新模式^[18]。

5 总结与展望

当前大语言模型在解决复杂问题,尤其是在数学研究领域取得的突破,标志着AI的应用范围正迈向推理证明的领域,其证明能力在IMO竞赛与形式化证明等方面得到了检验,打破了此前人们对机器“仅擅长模式识别、不擅长长链条推理”的传统认知。不过,尽管当今AI能力进展迅速,但仍需客观地看待AI在现阶段的局限性。例如数学家陶哲轩(Terence Tao)在对IMO竞赛的公开评论中指出,AI在数学竞赛中的表现受多种因素影响,包括计算资源、指令质量、输出要求等,因此难以准确评

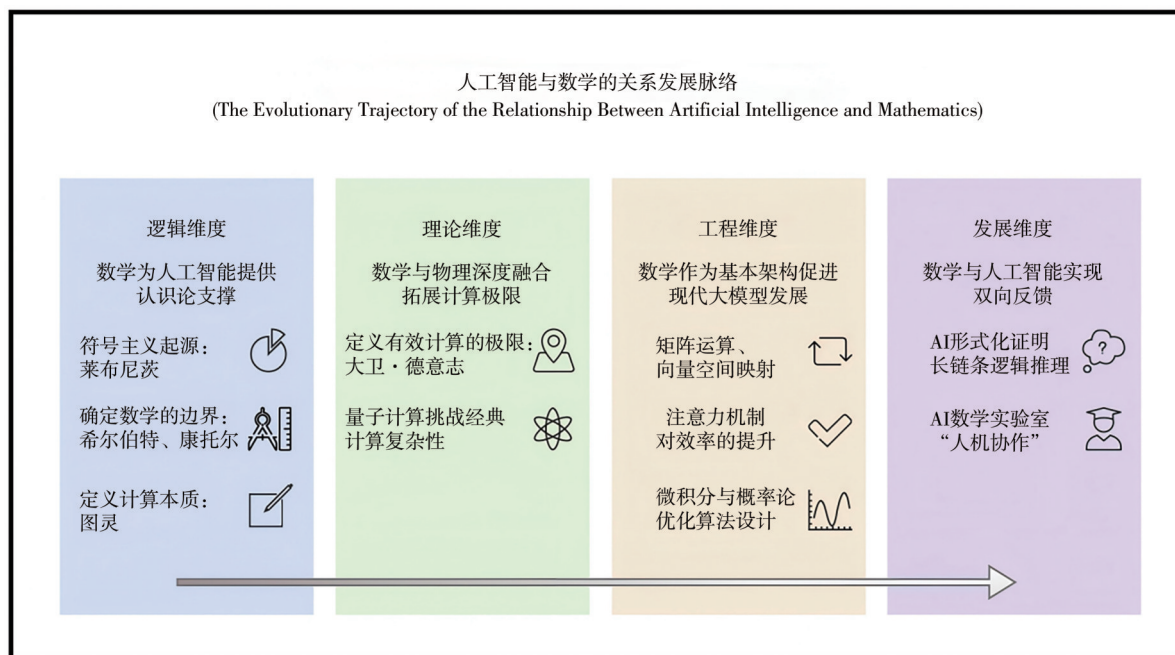


图3 人工智能与数学的关系发展脉络

Figure 3 The Evolutionary Trajectory of the Relationship Between Artificial Intelligence and Mathematics

估,这意味着还不能简单地将AI现在取得的成绩与人类考生直接比较。此外,陶哲轩先生也给出了他对于AI与LLM在数学证明中作用的想法:AI不是完全的“创造者”,它的定位是增强人类能力的工具。

当前,如图3显示,数学与AI的关系正在发生深刻演变。数学构建了AI,而AI正在反哺和重塑数学本身。当AI能够辅助甚至独立完成严谨的数学证明时,它已从一个单纯的计算工具,转变为人类智慧的合作者。未来,人工智能或许将继续挑战数学的边界,开启形式化推理和知识创造的新时代。

参考文献:

- [1] McCarthy J. Programs with common sense [C]//Proceedings of the Teddington Conference on the Mechanization of Thought Processes. London: Her Majesty's Stationery Office, 1958: 77-84.
- [2] Von Neumann J. First draft of a report on the EDVAC [R]. Philadelphia: Moore School of Electrical Engineering, University of Pennsylvania, 1945.
- [3] Hilbert D. Mathematical problems [J]. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1902, 8(10): 437-479.
- [4] Turing A M. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem [J]. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1937, 42(1): 230-265.
- [5] Sipser M. Introduction to the theory of computation [M]. 3rd ed. Boston: Cengage Learning, 2012.
- [6] Deutsch D. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer [J]. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1985, 400 (1818): 97-117.
- [7] Russell S J, Norvig P. Artificial intelligence: a modern approach [M]. 4th ed. Upper Saddle River: Pearson, 2020: 2-4, 11-12.
- [8] Wu Wen-tsun. On the decision problem and the mechanization of theorem-proving in elementary geometry [J]. *Scientia Sinica*, 1978, 21(2): 159-172.
- [9] Jurafsky D, Martin J H. Speech and language processing: an introduction to natural language processing, computational linguistics, and speech recognition [M]. 2nd ed. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2009.
- [10] Li Feifei. The worlds I see: curiosity, hope, and AI at the dawn of a future [M]. New York: Flatiron Books, 2023.
- [11] Karpathy A. State of GPT [R/OL]. 2023-05-23. <https://build.microsoft.com/>.
- [12] Appel K, Haken W. Every planar map is four colorable [J]. *Illinois Journal of Mathematics*, 1977, 21 (3): 429-567.
- [13] Chung F R K. Editorial [J]. *Journal of Graph Theory*, 1988, 12(1): iii-iv.
- [14] OpenCompass. GAOKAO-Eval [DB/OL]. (2024-07-17) [2026-03-23]. <https://github.com/open-compass/GAOKAO-Eval>.

- [15] MiMo-VL. MiMo-VL 高考数学题测试[EB/OL]. (2025-06-16) [2025-12-18]. <https://my.feishu.cn/docx/Z8dNdScFdopPwnxMJxfenVpnnwh>.
- [16] Google DeepMind. Advanced version of Gemini with Deep Think officially achieves gold-medal standard at the International Mathematical Olympiad[EB/OL]. (2025-07-21) [2025-12-18]. <https://deepmind.google/blog/advanced-version-of-gemini-with-deep-think-officially-achieves-gold-medal-standard-at-the-international-mathematical-olympiad/>.
- [17] Huang Yichen, Yang Lin. Winning Gold at IMO 2025 with a model-agnostic verification-and-refinement pipeline[R/OL]. (2025-09-30) [2025-12-18]. <https://arxiv.org/abs/2507.15855>.
- [18] Davies A, Veličković P, Casacuberta L, et al. Advancing mathematics by guiding human intuition with AI[J]. *Nature*, 2021, 600(7887): 70-74. DOI: 10.1038/s41586-021-04086-x.



彭鹏, 山西大学科学技术史研究所副教授, 硕士生导师, 理学博士, 中国科学技术史学会物理学史专业委员会副秘书长, 中国科学技术史学会精密科学史专业委员会常务理事, 中国自然辩证法研究会物理学哲学专业委员会理事, 中国科学与科技政策研究会技术预见专业委员会委员, 《新兴科学和技术趋势》编辑部青年编委, 编辑部副主任。山西大学量子光学与光量子器件国家重点实验室光学博士毕业。主要研究方向为物理学史, 科技哲学, 科技政策等。近年来, 主持国家社会科学基金后期资助项目, 国家自然科学基金, 老科学家学术成长采集工程等项目 11 项, 参与 2 项国家社科基金重大项目, 1 项教育部重大课题。先后在 *Nature Physics*, *Phys.Rev.Lett*, 《中国软科学》《自然辩证法研究》《自然辩证法通讯》《哲学分析》等期刊发表论文 42 篇, 其中 3 篇被《新华文摘》全文转载, 并有 2 篇入选封面要目, 3 篇被中国物理学会期刊网全文转载推送; 科研成果中 2 篇获“山西省社会科学研究优秀成果二等奖”, 1 篇获“山西省人民政府重大决策咨询课题成果二等奖”, 其专著《极寒之地: 探索肉眼可见的宏观量子效应》入选“2024 年上海市优秀科普图书”。Email: pengpeng@sxu.edu.cn

(责任编辑: 陈 立)